

УДК 004.827

doi: 10.15622/rcai.2025.042

О ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В КОНЕЧНЫХ РАЗМЫТЫХ МОДЕЛЯХ

Г.Э. Яхьяева (*gul_nara@mail.ru*)

О.Д. Пальчунова (*o.palchunova@g.nsu.ru*)

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Теория размытых моделей представляет собой альтернативный способ формализации неточности и/или неполноты знаний по сравнению с подходом, основанным на нечетких множествах, предложенным Лотфи Заде. При использовании размытых моделей для формализации знаний о предметных областях возникает необходимость количественно описать степень неопределенности и размытости этих моделей. В статье были рассмотрены различные количественные характеристики, учитывающие неопределенность конечных размытых моделей. В работе представлены различные методы формализации степени неопределенности размытой модели: вероятностный подход, который учитывает степень случайности события в предметной области; нечеткий подход, связанный с неопределенностью понятий в этой области; и объектный подход, описывающий неопределенность на уровне объектов. Также анализируется коэффициент сепарабельности размытой модели, показывающий, на сколько независимых подмоделей можно разбить данную размытую модель.

Ключевые слова: размытая модель, энтропия, коэффициент сепарабельности.

Введение

В середине XX века американский математик Клод Шеннон ввел понятие информационной энтропии, которая интерпретируется как мера неопределенности, связанной с возможными символами или исходами [Shannon, 1945]. Это мера неопределенности или среднего количества информации, связанного с набором вероятностей в системе.

В 1972 году Альфредо Де Лука и Сеттимо Термини впервые предложили рассматривать энтропию нечеткого множества [De Luca et al., 1972] – меру неопределённости в системах с нечётко определёнными парамет-

рами, расширяющая классическую концепцию Шеннона на нечеткие множества. На сегодняшний день существует порядка двадцати альтернативных определений энтропии нечеткого множества, отражающие различные аспекты неопределенности, заложенной в понятие нечеткого множества [Al-Sharhan et al., 2001].

Энтропия имеет важное значение для анализа и проектирования нечетких систем, поскольку она позволяет количественно оценивать уровень неопределенности и оптимизировать управление этими системами. Это, в свою очередь, способствует повышению надежности гипотез, выдвигаемых интеллектуальными системами [Кобринский и др., 2024]. В отличие от классической теории вероятностей, в нечетких системах энтропия отражает степень неопределенности, связанную с принадлежностью элементов к нечетким множествам.

Теория размытых моделей является альтернативным подходом к формализации нечеткости и/или неполноты знаний по отношению к формализации с помощью нечетких множеств, предложенных Лотфи Заде [Yakhyaeva et al., 2023a], [Пальчунов, 2022]. В отличие от функциональных нечетких логик, в которых не выполняются те или иные базовые логические тождества (такие, как, закон невозможности противоречия, закон исключённого третьего и др.), в теории размытых моделей сохраняются все теоретико-модельные тождества, то есть она является консервативным расширением классической теории моделей. Это с одной стороны решает проблему логических противоречий нечетких логик (в стиле Л.Заде), а с другой стороны даёт возможность одновременной работы как с классическими, так и с нечеткими моделями.

При формализации знаний о предметных областях с помощью размытых моделей также встает вопрос о количественном описании степени неопределенности/размытости этих моделей. Важно различать два основных типа неопределенности: вероятностную (стохастическую) и нечеткую (лингвистическую). Вероятностная неопределенность связана со случайностью возникновения событий в предметной области. Описание количественных характеристик такой неопределенности в размытых моделях посвящен параграф 2 данной статьи.

Нечеткая неопределенность относится к неоднозначности, расплывчатости или отсутствию четких границ в определении самих понятий или множеств. Энтропии нечеткого множества, рассматриваемые в параграфе 3, направлены на количественную оценку этого типа неопределенностей в размытой модели.

При рассмотрении нечетких неопределённостей акцент делается на неопределенность понятий, но не объектов предметной области. Описание объектной (или семантической) неопределенности посвящен параграф 4 данной статьи.

Рассматривая события, происходящие в предметной области мы сталкиваемся с понятием независимых событий, т.е. когда исход одного из которых не влияет на вероятность наступления другого. Исходя из этого, размытая модель может быть разложена на произведение независимых друг от друга подмоделей. Описанию таких разложений и их количественной характеристики посвящен параграф 5 данной статьи.

1. Основные определения и обозначения

Рассмотрим некоторую предметную область S , описываемую языком (сигнатурой) Σ . В данной работе (для упрощения изложения) мы будем рассматривать чисто предикатную сигнатуру, т.е. не содержащую функциональных символов и символов констант. Через \mathcal{M} будем обозначать множество предложений сигнатуры Σ , а через \mathcal{A} – множество атомарных предложений сигнатуры Σ .

Мы будем говорить об истинности формул на размытой модели M . Для того чтобы говорить не об истинности произвольных формул, а только об истинности предложений, будем обогащать сигнатуру новыми константами. Будем использовать сигнатуру Σ_M , где M – модель. При этом на M будет выполняться true .

Определение 1. [Яхьяева, 2025] *Тройку (S, Σ, M) будем называть размытой моделью, если истинностная функция является аддитивной нечеткой мерой, определенной на алгебре Линденбаума-Тарского $\mathcal{L}(M)$.*

Размытую модель M будем называть **точной** (или классической), если ее истинностная функция принимает только значения 0 или 1, т.е. $\text{true}_M(A) \in \{0, 1\}$.

Обозначим через \mathcal{M}_Σ класс всех размытых моделей сигнатуры Σ , определенных на множестве S и через \mathcal{T}_Σ – класс всех точных моделей сигнатуры Σ , определенных на множестве S . Очевидно, что $\mathcal{T}_\Sigma \subseteq \mathcal{M}_\Sigma$.

Размытую модель M будем называть *конечной*, если она определена на конечном множестве S и описывается конечной сигнатурой Σ , т.е. если множество атомарных предложений \mathcal{A} – конечно.

Заметим, что если M – конечная модель, то M – точная модель. Однако, по Теореме о разложении (сформулированной и доказанной в следующем параграфе) мощность класса \mathcal{M}_Σ будет континуальной.

Данная статья посвящена изучению конечных размытых моделей.

2. Прецедентная энтропия размытой модели

Одним из подходов к описанию меры неопределенности размытой модели является явное описание класса прецедентов предметной области, формализованных при помощи размытой модели. Для этого нам понадобится понятие взвешенной суммы.

Определение 2. Будем говорить, что размытая модель раскладывается во **взвешенную сумму** размытых моделей, если найдется такая последовательность чисел, что

1.

2. Для любого предложения выполняется

Будем записывать

Теорема 1 (о разложении). Любая конечная размытая модель раскладывается во взвешенную сумму точных моделей.

Доказательство. Рассмотрим конечную размытую модель. Пусть. Для каждого предложения и для каждой алгебраической системы введем обозначения

Определим отображение следующим образом:

где.

Покажем, что модель раскладывается во взвешенную сумму

Для этого нам необходимо проверить свойства из Определения 2.

(1) В силу аддитивности нечеткой меры получим:

(2) Рассмотрим предложение . Введем обозначение:

Так как модель конечная, то предложение представимо в виде СКНФ, содержащей все атомарные предложения сигнатуры , т.е. найдутся такие , что

В силу аддитивности меры получим

где и .
А так как модель (для любого ϵ) является точной, то

Таким образом,
Откуда и следует выполнение свойства (2).

Теорема доказана.

Отображение , определенное выше, назовем **распределением**, соответствующем размытой модели .

Класс точных моделей

назовем **классом прецедентов** предметной области , формализуемой посредством размытой модели .

Заметим, что чем меньше различных прецедентов имеет место быть в данной предметной области, тем меньше неопределенностей в ней возникает, и если предметная область содержит ровно один прецедент, то описывающая ее модель становится точной.

Таким образом, мы можем задать первую характеристику неопределенности размытой модели

Определение 3. Рассмотрим размытую модель и класс прецедентов , соответствующий этой модели. **Прецедентной энтропией** размытой модели назовем величину, заданную следующим образом:

Для любого прецедента меру можно интерпретировать как "значимость" прецедента для данной предметной области. Таким образом, если стремится к нулю, то прецедент является "несущественным" для данной предметной области.

Рассматривая класс точных моделей как значения некоторой случайной величины, а распределение как вероятностное распределение этой случайной величины, мы можем ввести понятие энтропии Шеннона для размытой модели.

Определение 4. Рассмотрим размытую модель и соответствующее ей распределение. Энтропией Шеннона размытой модели назовем величину, заданную следующим образом:

Очевидно, что чем больше значения прецедентной энтропии и энтропии Шеннона, тем больше неопределенности заложено в размытой модели. Модель имеет максимальную степень неопределенности, если описываемая ею предметная область содержит всевозможные точные модели как прецеденты и при этом все прецеденты равновероятны. В этом случае и .

3. Энтропии нечеткого множества

В классической теории моделей атомарная диаграмма модели – это некоторое подмножество множества всех атомарных предложений данной сигнатуры. Атомарная диаграмма модели описывает знания об истинности базовых (атомарных) понятий данной предметной области. Поскольку мы имеем дело с моделями, в которых все предложения имеют оценочную характеристику (нечеткую оценку), то под атомарной диаграммой размытой модели будем понимать нечеткое подмножество множества, функция принадлежности которого совпадает с мерой, определяющей сигнатуру этой модели.

Множество упорядоченных пар будем называть *атомарной диаграммой* размытой модели.

В работе [Yakhujeva, 2025] было показано, что атомарная диаграмма (в отличие от классического случая) не описывает однозначно размытую модель. С другой стороны, означивание всех бескванторных предложений данной сигнатуры является избыточным условием для однозначного описания размытой модели.

Пусть Обозначим через множество всех позитивных конъюнктов сигнатуры, т.е. Тогда множество упорядоченных пар

будем называть *позитивной диаграммой* размытой модели.

Теорема 2. [Yakhyaeva, 2025] Любая размытая модель однозначно задается своей позитивной диаграммой.

Таким образом, рассматривая различные нечеткие энтропии позитивной диаграммы размытой модели, мы можем ввести дополнительные характеристики неопределенности размытой модели.

В качестве примера приведем формулировки, в контексте размытых моделей, энтропий Де Луки-Термини [Sheikh et. al., 2018] и индекс нечеткости Кауфмана [Kral, 2005].

Определение 5. Рассмотрим размытую модель M и соответствующую ей позитивную диаграмму D_M . Энтропией Де Луки-Термини размытой модели M назовем величину, заданную следующим образом:

Энтропия Де Луки и Термини более тесно связана с теорией информации и акцентирует внимание на неопределенности, подобно энтропии Шеннона. Также, как и в энтропии Шеннона, работает соглашение, что $H(M) = 0$. Исходя из этого мы получаем, что $H(M) = 0$ принимает нулевое значение тогда и только тогда, когда позитивная диаграмма размытой модели D_M является четким множеством. А это, в свою очередь, является необходимым и достаточным условием того, что модель M являлась точной.

Индекс нечеткости Кауфмана проще в вычислении и фокусируется на геометрической интерпретации нечеткости как расстояния до четкого множества. Индекс нечеткости измеряет, насколько нечеткое множество отличается от ближайшего четкого множества, основываясь на расстоянии (обычно евклидовом или Хэмминга).

Определение 6. Рассмотрим размытую модель M и соответствующую ей позитивную диаграмму D_M . Индексом нечеткости Кауфмана размытой модели M назовем величину, заданную следующим образом:

где

Не трудно проверить, что $K(M) = 0$ тогда и только тогда, когда модель M является точной.

Предложение 1. Рассмотрим размытую модель M . Тогда

где

Таким образом, если размытая модель характеризуется максимальным индексом нечеткости Кауфмана, то она имеет почти минимальную прецедентную энтропию, т.е. она раскладывается во взвешенную сумму всего лишь двух точных моделей. Однако эти модели образуют контрарную пару, т.е. максимально «удалены» друг от друга.

4. Объектная энтропия размытой модели

Во втором параграфе, рассматривая характеристики неопределенности размытой модели, мы рассматривали только количество прецедентов предметной области и их вероятностное распределение. Но мы не сравнивали прецеденты между собой. Однако, у нас может сложиться ситуация, когда имеются две различные размытые модели, обладающие одним и тем же количеством прецедентов и одним и тем же вероятностным распределением, заданном на классах этих прецедентов. Тогда прецедентные энтропии и энтропии Шеннона таких моделей будут равны.

Однако, если мы посмотрим на структуру этих прецедентов, то в одном случае они могут лишь не значительно отличаться друг от друга, а в другом случае, например, содержать контрарные пары прецедентов. Очевидно, что в этом случае степени неопределенности у них будут разные. И нам нужны величины, отражающие эти различия.

Определение 7. [Yakhyaeva, 2023b] Пусть M и N — размытые модели одной сигнатуры. Будем говорить, что размытая модель M является **подмоделью** размытой модели N (обозначение $M \subseteq N$), если M и для любого бескванторного предложения ϕ имеет место $M(\phi) \subseteq N(\phi)$.

Пусть M — размытая модель. Заметим, что так как в начале данной статьи мы договорились рассматривать чисто предикатную сигнатуру, то для любого подмножества S возможно построить подмодель $M|_S$.

Подмодель $M|_S$ модели M будем называть **ядерной**, если она является точной моделью, т.е. если $M|_S(\phi) = \{1\}$ для любого $\phi \in S$. Заметим, что у размытой модели может быть более одной ядерной подмодели. Модель, определенную на объединение носителей всех ядерных подмоделей, будем называть **ядром** размытой модели M и обозначать через $\text{Ядро}(M)$. Если же размытая модель M не имеет ядерных подмоделей, то будем говорить, что она обладает пустым ядром и записывать $\text{Ядро}(M) = \emptyset$.

Подмодель будем называть **телом** размытой модели и обозначать через τ , если τ и для любой модели такой, что выполняется условие:

Заметим, что если модель является точной, то она совпадает со своим ядром. В этом случае $\tau = 1$. Исходя из этого мы можем ввести еще одну характеристику неопределенности размытой модели.

Определение 8. Рассмотрим размытую модель τ , обладающую телом τ Body. Объектной энтропией размытой модели назовем величину, заданную следующим образом:

—

Таким образом, если размытая модель обладает пустым ядром, то она имеет максимальную объектную энтропию, равную 1. Если же модель является точной, то ее объектная энтропия равна 0.

Предложение 2. Рассмотрим размытую модель τ . Тогда

Таким образом, данное предложение утверждает, что если размытая модель имеет максимальную прецедентную энтропию, то она будет иметь и максимальную объектную энтропию. Обратное утверждение будет не верно.

5. Коэффициент сепарабельности размытой модели

Одной из ключевых концепций теории вероятности и статистики является понятие независимости событий. Она позволяет проводить более точные и простые расчеты, так как можно использовать более простые формулы для нахождения совместной вероятности. Независимые события имеют важное значение в областях, где необходимо анализировать случайные процессы. Также независимость событий можно рассматривать в ключе решения проблемы сепарабельности квантовых систем [Яхьяева и др., 2024].

При вероятностном подходе к изучению свойств размытых моделей мы можем говорить о независимости различных событий, описываемых размытой моделью. Независимость событий мы будем формализовывать, используя понятие сепарабельного произведения моделей.

Определение 9. Пусть τ размытые модели одной сигнатуры τ . Сепарабельным произведением моделей τ будем называть класс размытых моделей τ , для которых выполняются условия:

- a) Для любого α выполняется:
 b) Для любых α, β выполняется:

где α и β — произвольные элементы \mathcal{M} .

Заметим, что не для любых моделей существует сепарабельное произведение. Необходимым и достаточным условием существования сепарабельного произведения моделей является условие, что либо \mathcal{M} — сепарабельная модель, либо существование общей подмодели с носителем \mathcal{M} .

Будем говорить, что модель \mathcal{M} раскладывается в сепарабельное произведение подмоделей $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$, если $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$.

Модель, которая не раскладывается в сепарабельное произведение будем называть *запутанной* [Yakhyaeva et al., 2024]. В противном случае модель будем называть *сепарабельной* [Yakhyaeva, 2023c].

Предложение 3. Любая размытая модель \mathcal{M} с непустым ядром раскладывается в сепарабельное произведение своего ядра и тела, т.е.

Заметим, что тело размытой модели не всегда раскладывается в сепарабельное произведение своих подмоделей.

Пусть $\mathcal{M} = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathcal{M}_i$. Данное разложение в сепарабельное произведение назовем *каноническим*, если модели \mathcal{M}_i являются запутанными. Если модель \mathcal{M} является моделью с пустым ядром, то ее каноническое разложение выглядит следующим образом: $\mathcal{M} = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathcal{M}_i$. Если же модель является запутанной, то ее каноническое разложение совпадает с самой моделью.

Теорема 3. Для любой размытой модели существует единственное каноническое разложение в сепарабельное произведение ее подмоделей.

Используя утверждение Теоремы 3, мы можем теперь ввести еще одну количественную характеристику неопределенности размытой модели.

Определение 10. Рассмотрим размытую модель $\mathcal{M} = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathcal{M}_i$. Количество запутанных моделей, входящих в каноническое разложение модели \mathcal{M} в сепарабельное произведение назовем *коэффициентом сепарабельности* модели \mathcal{M} и будем обозначать через $\kappa(\mathcal{M})$.

Рассмотрим размытую модель $\mathcal{M} = \sum_{i \in I} \alpha_i \mathcal{M}_i$ и ее прецедентную энтропию $H(\mathcal{M})$, где α_i и \mathcal{M}_i — элементы \mathcal{M} . Не трудно понять, что $\kappa(\mathcal{M}) = 1$ тогда и только тогда, когда \mathcal{M} — сепарабельная модель, т.е. модель является сепарабельной.

точной. Если же , то . Следовательно, если размытая модель является сепарабельной, то она формализуется как минимум четырьмя прецедентами.

Заключение

В статье были проанализированы различные количественные характеристики учета неопределенности конечных размытых моделей. Общей чертой всех этих характеристик является то, что они достигают своего минимального значения, когда модель точна, и увеличиваются с ростом неопределенности. Однако максимальные значения этих характеристик наблюдаются на различных размытых моделях. Это объясняется тем, что каждая из характеристик предоставляет свое уникальное понимание неопределенности, присущей размытой модели.

Например, прецедентная энтропия и энтропия Шеннона акцентируют внимание на вероятностных (статистических) аспектах размытой модели. В то время как энтропии нечетких множеств и объектная энтропия рассматривают семантический подход к описанию неопределенности размытой модели.

Особый интерес представляет коэффициент сепарабельности размытой модели, который указывает, на сколько независимых подмоделей можно разделить данную размытую модель. Определение этого коэффициента связано с семантикой размытой модели (т.е. с ее истинностной функцией), но также прослеживается и связь с вероятностным распределением прецедентов размытой модели.

В дальнейшем мы планируем более подробно изучить взаимосвязь статистических и семантических характеристик размытых моделей и описать закономерности этих взаимосвязей.

Список литературы

- [Кобринский и др., 2024] Кобринский Б.А., Николаев А.А. Вероятностное представление измеряемых признаков и их отражение в системах искусственного интеллекта // XII международная научно-практическая конференция «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте» (ИММВ-2024) (Коломна, 14-17 мая 2024 г.). – Т. 2. – С. 86-93.
- [Пальчунов, 2022] Пальчунов Д.Е. Теория моделей предметных областей. I // Алгебра и логика. – 2022. – Т. 61, № 2. – С. 239-250. – Doi: 10.33048/alglog.2022.61.207.
- [Яхьяева и др., 2024] Яхьяева Г.Э., Пальчунова О.Д. О квантовой интерпретации теории нечетких моделей // XII международная научно-практическая конференция «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте» (ИММВ-2024) (Коломна, 14-17 мая 2024 г.). – Т. 1. – С. 225-236.
- [Яхьяева, 2025] Яхьяева Г.Э. Классы нечетких моделей // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2025. – Т. 51. – С. 151-166. – Doi: 10.26516/1997-7670.2025.51.151

- [**Al-Sharhan et al., 2001**] Al-Sharhan S., Karray F., Gueaieb W., Basir O. Fuzzy entropy: A brief survey. In: 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Melbourne, Australia. 2001. – P. 1135-1139. – Doi: 10.1109/FUZZ.2001.1008855.
- [**De Luca et al., 1972**] De Luca A., Termini S. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory // Information and Control. – 1972. – Vol. 20(4). – P. 301-312. – Doi: 10.1016/S0019-9958(72)90199-4.
- [**Kral, 2005**] Kral P., Cardinality and Entropy of IF sets. Ninth // Int. Conf. on IFSs, Sofia, 7-8 May 2005, NIFS. – 2005. – Vol. 11. – P. 78-87.
- [**Shannon, 1945**] Shannon C.E. A Mathematical Theory of Communication // Bell System Technical Journal. – 1945. – Vol. 27 (3 and 4). – P. 379-423, 623-656. – Doi: 10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x.
- [**Sheikh et al., 2018**] Sheikh B.Q. and Baig M.A.K., An Overview of Fuzzy Entropy-Some NonParametric Generalizations and Applications // Journal of Basic and Applied Engineering Research p-ISSN: 2350-0077; e-ISSN: 2350-0255; Vol. 5, Issue 6; October-December, 2018. – P. 496-499.
- [**Yakhyayeva et al., 2023a**] Yakhyayeva G.E., Palchunova O.D. Fuzzy Models as a Formalization of Expert's Evaluative Knowledge // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2023. – Vol. 33(3). – P. 529-535. – Doi: 10.1134/S105466182303046X.
- [**Yakhyayeva, 2023b**] Yakhyayeva G.E. On the Local Coordination of Fuzzy Valuations // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. – 2023. – Vol. 46. – P. 130-144. – Doi: 10.26516/1997-7670.2023.46.130.
- [**Yakhyayeva, 2023c**] Yakhyayeva G.E. Separable Fuzzy Models // In: IEEE 16th International conference of actual problems of electronic instrument engineering (APEIE). – 2023. – P. 1480-1483. – Doi: 10.1109/APEIE59731.2023.10347792.
- [**Yakhyayeva et al., 2024**] Yakhyayeva, G.E., Palchunova, O.D. Entangled Fuzzy Models // In: IEEE International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences, SIBIRCON 2024. – 2024. – P. 314-318. – Doi: 10.1109/SIBIRCON63777.2024.10758476.
- [**Yakhyayeva, 2025**] Yakhyayeva G.E., Semantic modelling of subject domains using precedent and blurry (fuzzy) models. Sirius Mathematical Journal. 2025 (в печати).